COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 4 NOVEMBRE 1844.

PRÉSIDENCE DE M. CHARLES DUPIN.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Note sur le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers; suivie d'une remarque sur une classe de séries récurrentes; par* M. BINET.

« Euclide nous a transmis la belle méthode qui conduit au plus grand diviseur de deux nombres entiers $A > a$. La multitude des divisions qu'elle oblige à exécuter peut effrayer le calculateur, quand le moindre des deux entiers, a, est fort considérable. M. Lamé vient de donner un théorème curieux d'après lequel le nombre de ces divisions ne peut surpasser cinq fois le nombre des chiffres de a : tout ce qui concourt à éclairer ou à perfectionner les méthodes arithmétiques, me semble digne de l'attention et des efforts des analystes.

» J'avais déjà cherché à rassurer les calculateurs sur la longueur de cette méthode, en prouvant que l'on pouvait arriver au grand diviseur de deux nombres A et a, par un système de divisions dont le nombre sera toujours moindre que $\frac{10}{3}\log(a)$ [*voyez* le tome VI du *Journal* de M. Liouville,

page 454, année 1841]. Le logarithme tabulaire de a étant moindre que le nombre α de ses chiffres, il en résulte que le nombre des divisions requises sera au-dessous de $\frac{10}{3}\alpha$. La limite obtenue par M. Lamé est 5α; ainsi la mienne aurait de l'avantage, puisqu'elle est de $\frac{5}{3}\alpha$ au-dessous. Toutefois, nous devons remarquer que les deux limites ne se rapportent pas exactement au même système d'opérations intermédiaires. Dans le but d'obtenir de moindres diviseurs pour les opérations successives, j'ai proposé d'effectuer la division en excès (ou en *dehors* selon l'expression de Lagrange) toutes les fois que le reste positif de la division ordinaire surpasse la moitié du diviseur : il faut pour cela accroître d'une unité le quotient, et prendre pour résidu de la division l'excès du diviseur sur le reste positif, ce qui amène un résidu négatif moindre que la moitié du diviseur. Sans faire attention au signe, ce résidu sera employé comme diviseur dans l'opération suivante, pour continuer la recherche du grand diviseur : cette modification au procédé usuel a l'avantage de faire nécessairement décroître les diviseurs dans une rapide progression. On va voir qu'elle donne aisément la limite du nombre des divisions qui procurent le grand diviseur.

» Ayant divisé A par a, soit $\pm a_1$ le résidu : on divise a par a_1, et l'on obtient un résidu $\pm a_2$, et l'opération continuée ainsi amène enfin un reste a_p qui divise a_{p-1} et qui est le grand diviseur. Par hypothèse, on a

$$a > 2a_1, \quad a_1 > 2a_2, \ldots, \quad a_{p-1} > 2a_p;$$

ou bien

$$a > 2a_1 > 2^2 a_2 > 2^3 a_3 > \ldots > 2^p a_p.$$

On a donc $2^p < \frac{a}{a_p}$, et en prenant les logarithmes tabulaires,

$$p \log(2) < \log(a) - \log(a_p);$$

par suite, le nombre p des divisions effectuées sera tel que

$$p < \frac{\log(a)}{\log(2)} < \frac{10}{3}\log(a),$$

puisque l'on a

$$\log(2) = 0{,}30102999\ldots > \frac{3}{10}.$$

Si α est le nombre des chiffres de a, et α_p celui des chiffres de a_p, on aura

$$\log(a) < \alpha, \quad \text{et} \quad \log a_p > \alpha_p - 1;$$

ainsi

$$\log(a) - \log(a_p) > \alpha - \alpha_p + 1;$$

par l'inégalité précédente, on aura donc

$$p < \frac{10}{3}(\alpha - \alpha_p + 1).$$

Le nombre α_p des chiffres du grand diviseur est inconnu au début de l'opération; mais cette formule indique néanmoins que la limite $\frac{10}{3}\alpha$ doit souvent être fort en excès.

» Dès qu'une première division a été effectuée, et que l'on connaît le nombre α_1 des chiffres du résidu a_1, il ne reste plus que $p - 1$ divisions à faire et l'on a

$$p - 1 < \frac{10}{3}\alpha_1,$$

ou bien

$$p < 1 + \frac{10}{3}\alpha_1.$$

En désignant par α_2 le nombre des chiffres de a_2, second résidu, on a aussi

$$p < 2 + \frac{10}{3}\alpha_2,$$

et ainsi des autres.

» Si l'on prend l'exemple cité par M. Lamé des nombres 1597, 987, qui exigerait 15 divisions, par l'opération usuelle, pour la recherche de leur diviseur, la limite fixée par M. Lamé est 14 : la limite du nombre de divisions de notre procédé est 10, puisque $\alpha = 3$, nombre des chiffres de 987. L'opération n'entraîne effectivement que 7 divisions, toutes en excès, et qui amènent les résidus 377, 144, 55, 21, 8, 3, 1.

Remarque sur les séries récurrentes.

» M. Lamé a rattaché sa démonstration ingénieuse à la considération d'une série récurrente particulière 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., dont un terme g_n se forme de la somme des deux précédents : elle est identique à celle qui m'a donné l'expression du dénombrement des combinaisons discontiguës [*Comptes rendus*

de l'Académie, tome XVII, page 563], et l'on a

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right];$$

le second terme de cette valeur est toujours au-dessous de l'unité dès que n est un entier : ainsi l'on peut calculer g_n par le nombre entier le plus voisin du premier terme

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2};$$

le logarithme tabulaire de cette expression étant

$$n[0{,}2078987\ldots] + 0{,}0634905\ldots,$$

on retrouve la propriété remarquée par M. Lamé sur la série des g_n, et d'après laquelle cinq termes consécutifs, au plus, ou bien quatre termes, au moins, admettent le même nombre de chiffres dans leur expression arithmétique.

» Je montrerai ailleurs que cette forme, qui réduit à un monôme l'expression du terme général d'une série récurrente, est applicable à un grand nombre de semblables séries : elle tient à ce qu'une certaine équation algébrique, formée à l'aide des termes de l'échelle de relation, se trouve n'avoir qu'une seule racine réelle, supérieure à l'unité, les modules des racines imaginaires étant d'ailleurs tous au-dessous de l'unité; c'est ce qui a lieu pour la série récurrente

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3},$$

et aussi pour

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3} + g_{n-4};$$

et ainsi des autres formées d'après le même type.

» L'équation algébrique provenant de l'échelle de relation est

$$\theta^p = \theta^{p-1} + \theta^{p-2} + \text{etc.} + 1;$$

elle ne peut avoir qu'une racine supérieure à 1; et si p est pair, sa racine négative est numériquement au-dessous de 1. Quant à ses imagi aires, leurs modules sont moindres que l'unité.

» L'expression par un monôme est très-approchée de la valeur exacte de g_n, quand n devient un grand nombre entier; elle pourra ne pas l'être pour de faibles valeurs de n, si les premières valeurs assignées aux g_0, g_1, g_2,... sont des nombres considérables. Mais quand ils sont petits, la valeur monôme peut même représenter des termes de rangs peu avancés dans la série, comme si elle était une simple progression géométrique. »

M. **Pouillet**, en présentant à l'Académie la quatrième édition de ses *Éléments de Physique et de Météorologie*, indique, de la manière suivante, les principales modifications qu'il y a introduites.

« Cette quatrième édition aurait dû paraître il y a deux ans, mais des occupations de diverse nature m'avaient empêché de l'entreprendre; elle exigeait d'autant plus de soins que, dans ces dernières années, la science s'est enrichie d'un grand nombre de faits nouveaux dont il fallait tenir compte.

» Les changements les plus considérables portent particulièrement sur la chaleur et l'électricité.

» Dans la théorie de la chaleur j'ai dû résumer l'ensemble des recherches importantes qui ont été faites sur les dilatations, les changements d'état, le calorique rayonnant et surtout la calorimétrie; en même temps il m'a paru nécessaire de faire entrer dans l'enseignement de la physique les principes relatifs aux machines à vapeur, non plus d'une manière accidentelle, mais d'une manière tout à fait spéciale, en donnant tous les développements que me semble exiger une aussi grande application qui prend tous les jours un nouveau degré d'intérêt.

» Dans le galvanisme et l'électricité, je ne pouvais me borner à une simple description des piles nombreuses et des appareils si divers qui ont été imaginés récemment; il était nécessaire d'entrer dans des discussions théoriques et dans l'examen des principes de l'électro-chimie: c'est un sujet vaste et difficile; j'ai essayé de le résumer aussi clairement qu'il m'a été possible, en m'attachant surtout à séparer les résultats incontestablement acquis à la science de ceux qui me semblent encore douteux, soit par la manière dont ils ont été obtenus, soit par les interprétations diverses qu'ils peuvent recevoir.

» Malgré ces changements essentiels, et beaucoup d'autres qui ont exigé moins d'espace, cette quatrième édition est en deux volumes seulement, comme la précédente; les quatre planches nouvelles que j'ai dû ajouter, tant pour les machines à vapeur que pour l'électro-chimie, ont été, comme celles des éditions antérieures, dessinées par M. Silbermann, qui s'est fait connaître

si favorablement à l'Académie par l'invention d'un nouvel héliostat et par d'autres communications intéressantes. »

A 3 heures et demie, l'Académie se forme en comité secret.

COMITÉ SECRET.

Dans le comité, en exécution d'une demande du Ministre de la Guerre, l'Académie a procédé à la nomination des trois membres qui, aux termes de l'ordonnance de réorganisation de l'École Polytechnique, doivent faire partie du Conseil de Perfectionnement. Les trois académiciens élus sont : MM. **Thenard**, **Poinsot**, **Charles Dupin**.

Avant qu'on ne procédât au scrutin, M. **Arago** s'était exprimé en ces termes :

« L'Académie m'ayant constamment accordé ses suffrages, toutes les fois » que, depuis quatorze années, elle a eu à nommer des membres du Conseil » de Perfectionnement de l'École Polytechnique, je crois pouvoir supposer » sans inconvenance, que plusieurs de mes amis sont encore disposés à me » faire le même honneur. J'accomplis donc un devoir en déclarant que, dans » les circonstances actuelles, il ne me serait pas possible de siéger au Conseil » de Perfectionnement. »

La Section de Chimie présente la liste suivante de candidats pour la place actuellement vacante dans son sein, par la mort de M. **Darcet** :

1°. M. Fremy,
2°. M. Balard,
3°. M. Peligot,
4°. MM. Cahours et Millon, *ex æquo*.

Les titres des Candidats sont développés et discutés. L'élection aura lieu lundi prochain ; les académiciens en seront prévenus à domicile.

La séance est levée à 7 heures. A.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans cette séance, les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; tome XVIII, 1er semestre 1844; in-4°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 2e semestre 1844; n° 18; in-4°.

Éléments de Physique expérimentale et de Météorologie; par M. POUILLET; 4e édition; 2 vol. in-8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine; tome X, n° 2; in-8°.

Histoire naturelle des Animaux sans vertèbres; par M. DE LAMARCK; 2e édition, revue et augmentée par MM. DESHAYES et MILNE EDWARDS; tomes IX et X; in-8°.

Mémoires et observations d'Anatomie, de Physiologie, de Pathologie et de Chirurgie; par M. RIBES; tome IIIe; in-8°.

Tableaux de Population, de Culture, de Commerce et de Navigation, formant, pour l'année 1841, *la suite des Tableaux insérés dans la Notice statistique sur les colonies françaises;* broch. in-8°.

Des Fumiers considérés comme engrais; par M. GIRARDIN; 3e édition. Rouen, 1844; in-32.

Séance publique de la Société centrale d'Agriculture du département de la Seine-Inférieure, tenue le 23 *novembre* 1843. — *Discours d'ouverture, par* M. GIRARDIN; broch. in-8°.

Sur l'ancienneté de l'usage du cidre en Normandie; Lettre à M. le comte DE GASPARIN; *par* le même; broch. in-8°.

Annales de l'Agriculture française; novembre 1844; in-8°.

Encyclographie médicale; octobre 1844; in-8°.

Journal de Chimie médicale, de Pharmacie et de Toxicologie; novembre 1844; in-8°.

Le Technologiste; novembre 1844; in-8°.

Journal des Connaissances médico-chirurgicales; novembre 1844; in-8°.

Journal des Connaissances utiles; octobre 1844; in-8°.

Annales de la propagation de la Foi; novembre 1844; in-8°.

A chronological... *Introduction chronologique à l'Histoire de l'Église, contenant de nouvelles recherches sur les véritables dates de la naissance et de la mort*

de Notre-Seigneur Jésus-Christ; par le révérend SAMUEL FARMAR JARVYS. Londres, 1844; in-8°.

CRANIA ÆGYPTIACA or Observations on... *Observations sur l'Ethnographie égyptienne, basées sur l'Anatomie, l'Histoire et les Monuments; par* M. S.-G. MORTON. Philadelphie, 1844. In-4°.

A Monograph... *Monographie des Mollusques univalves d'eau douce des États-Unis; par* M. HALDEMAN. Philadelphie, 1842; in-8°.

Bericht uber... *Analyse des Mémoires lus à l'Académie des Sciences de Berlin, et destinés à la publication;* juillet et août 1844; in-8°.

Astronomische... *Nouvelles astronomiques de* M. SCHUMACHER; n° 518; in-4°.

Tijdschrift... *Journal d'Histoire naturelle et de Physiologie, publié par* MM. VANDER-HOEVEN *et* DE VRIESE; XI^e^ vol., 1^re^ et 2^e^ livr.; in-8°.

Gazette médicale de Paris; n° 44; in-4°.

Gazette des Hôpitaux; n^os^ 127 à 128; in-fol.

L'Écho du Monde savant; n° 33.